

QCD

particle: quarks

gauge boson: gluons

準備：  
単位系と力学変数

# 単位系 (Units)

原子核物理、高エネルギー物理で良く用いられる  
単位

- エネルギーの単位: MeV、又は GeV

$$1 \text{ GeV} = 1.78 \times 10^{-27} \text{ kg} ; \quad \text{陽子質量 } m_p \sim 1 \text{ GeV}/c^2$$

- 長さの単位: fm

$$\hbar = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec} \quad (\text{作用の次元: } ML^2T) \quad ; \quad \text{陽子の大きさ} \sim 1 \text{ fm}$$

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1} \quad (\text{速度の次元: } L/T)$$

$$\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 0.197 \text{ GeV} \cdot \text{fm}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \quad (\text{微細構造定数})$$

# 使用例

## 不確定性關係

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx \hbar \quad ; \quad \Delta x = 1 \text{ fm} \quad \Delta p \approx 200 \text{ MeV}/c$$

## 古典的電子半徑

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m_e c^2} = \frac{\hbar \cdot \hbar c}{m_e c^2} = \frac{197[\text{MeV} \cdot \text{fm}]}{137} \frac{1}{0.511[\text{MeV}]} \sim 2.8 \text{ fm}$$

## Compton波長

$$\text{(電子)} \quad \lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{197[\text{MeV} \cdot \text{fm}]}{0.511[\text{MeV}]} \sim 380 \text{ fm}$$

$$\text{(陽子)} \quad \lambda_p = \frac{\hbar}{m_p c} = \frac{\hbar c}{m_p c^2} = \frac{197[\text{MeV} \cdot \text{fm}]}{938[\text{MeV}]} \sim 0.2 \text{ fm}$$

# 自然単位系

自然単位系:  $\hbar = c = 1$  → 煩雑さを回避  
エネルギーの単位: GeV → 一意的

	実際の次元	自然単位系
		$\hbar = c = 1$
質量	GeV/c <sup>2</sup>	GeV
長さ	$\hbar c$ / GeV	GeV <sup>-1</sup>
時間	$\hbar$ / GeV	GeV <sup>-1</sup>

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \square \quad E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

実際の値を求める際には、適当に  $\hbar$  や  $c$  を補う必要あり。

例: 断面積  $\square$

$$1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad \square = 1 \text{ GeV}^{-2} = 0.389 \text{ mb} \quad \text{--- 証明せよ}$$

# 力学変数 (kinematic variable)

反応:  $A + B \rightarrow a + X$

粒子  $a$  の運動を記述する力学変数 : 4元運動量ベクトル

$$p = (E, p_x, p_y, p_z)$$

$$p_{\mu} p^{\mu} = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2$$

$$p_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_z \pm E)$$

$$E_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E \pm p_z)$$

必要に応じて有用な力学変数を使用される

- Rapidity ( $y$ )
- Light-cone variable :  $x^+$   $x^-$

# Rapidity

Z軸方向のLorentz変換を考える

- 速度は加算的ではない

$$\text{Galilei変換} : v_z = v_z + V_R$$

$$\text{Lorentz変換} : v_z = \frac{v_z + V_R}{1 + v_z V_R}$$

速度に代わる加算的な量  $\rightarrow$  rapidity

Rapidity  $y$  の定義

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta_z}{1 - \beta_z} = \ln \frac{E + p_z}{m_T}$$

$$m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$$

# Rapidityの性質

- 非相対論のリミット ;  $\beta_z \rightarrow 0$  :

$$y \rightarrow \beta_z$$

- Lorentz変換に対する変換性

慣性系KとK'の間の相対速度 :  $\beta_R$

$$y' = y + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \hat{a}_R}{1 - \hat{a}_R} = y + y_R$$

$$dy = \frac{dp_z}{E}$$

- 非相対論における速度の変換と相似 :  $v' = v + v_R$
- $y$  の差は Lorentz 不変
  - 粒子間の  $y$  の相対的な関係は保持される

# Rapidityの性質(続き)

- 超相対論的な場合 :  $p \rightarrow E$

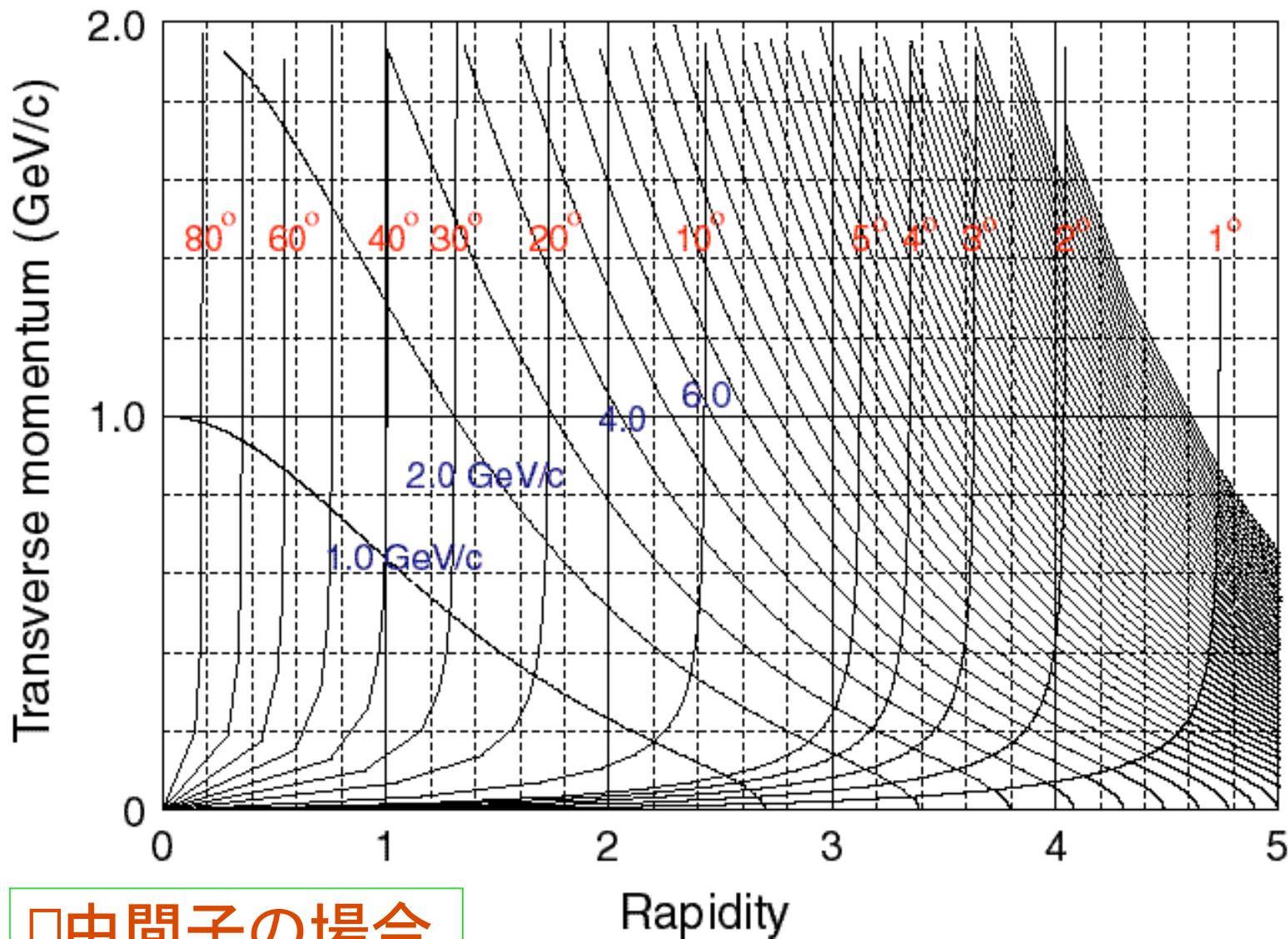
$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{p + p_z}{p - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

粒子の rapidity は放出角によって決まる

Pseudo-Rapidity ( $\eta$ )

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{p + p_z}{p - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \ln \cotan \frac{\theta}{2}$$

# Rapidity- $p_T$ 平面での力学線



# Rapidity を用いた有用な関係式

- エネルギーと運動量

$$\begin{aligned} E &= m_T \cosh y \\ p_z &= m_T \sinh y \end{aligned}$$



$$E^2 - p_z^2 = m^2 + p_x^2 + p_y^2$$

- Invariant Cross Section

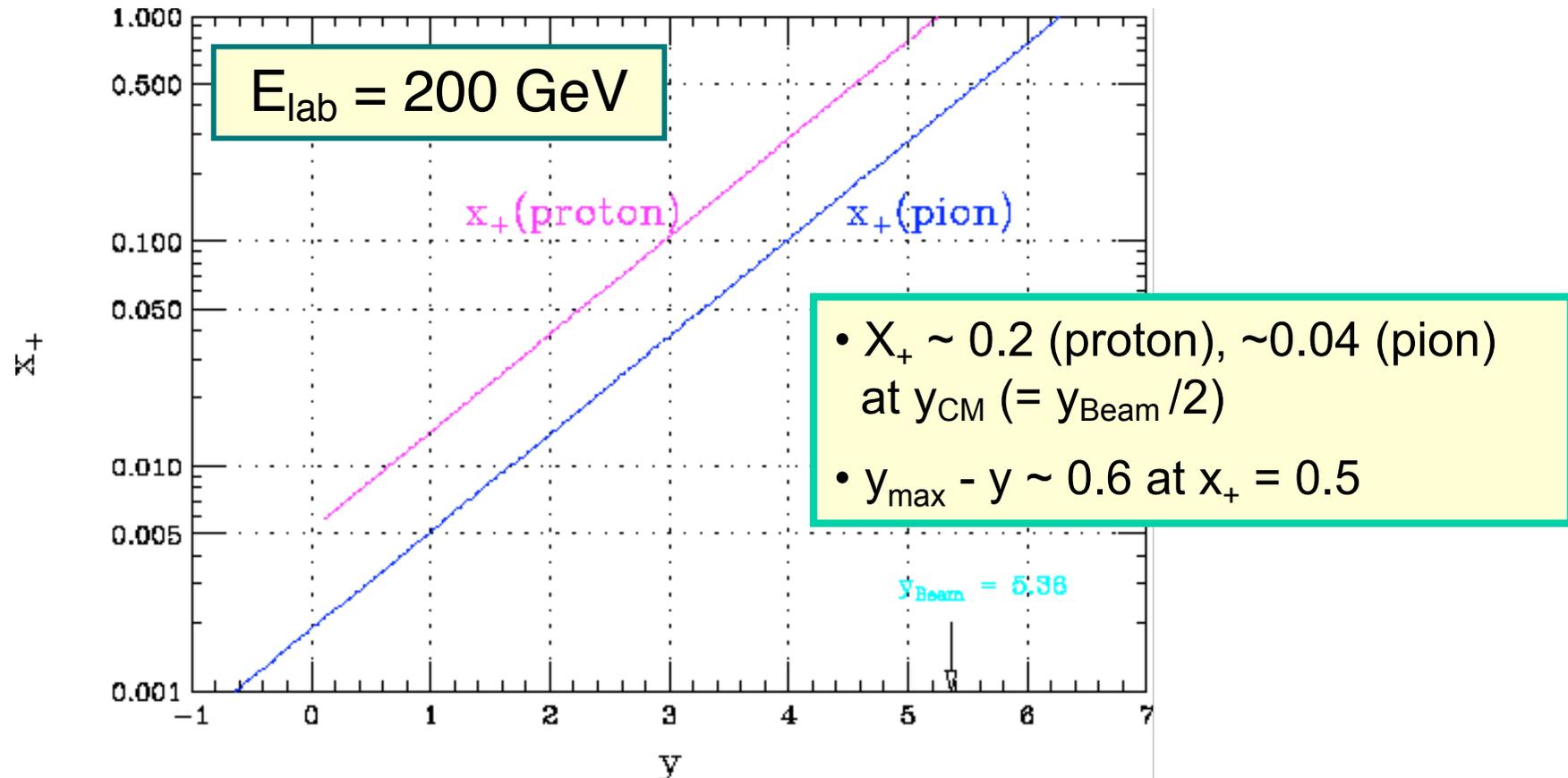
$$\frac{dp_z}{E} = dy; \quad \square_{inv} = E \frac{d^3 o}{dp^3} = \frac{d^3 o}{dy p_T dp_T d\phi} = \frac{d^3 o}{dy m_T dm_T d\phi}$$

- $d\phi$  と  $dy$  の関係

$$dy = \frac{p}{E} d\phi \quad \square \quad \frac{dN}{d\phi} = \frac{p}{E} \frac{dN}{dy}$$



# X と y の関係



- X 変数はビーム運動量に近い運動量を持つ (fragmentation領域の) 粒子を記述するのに適している
- Rapidity 変数は、target や beam から離れた領域における粒子生成を記述するのに適している

# ハドロンの静的 な性質

# ハドロンとその多体系

- ハドロン
  - 強い相互作用をする粒子の総称
  - 歴史的な呼び名
- 現代的：クォーク（反クォーク）からなる複合粒子の総称
  - バリオン：  $p, n, \dots$  (クォーク三つからなる)
  - メソン：  $\pi, K, \dots$  (クォーク・反クォーク対からなる)
  - 相互作用： QCD

# QCD - 概観 -

クォーク : 3世代のアイソスピン 2 重項

- (u,d), (c,s), (t,b)

- スピン 1/2 電荷  $u = 2/3$ ,  $d = -1/3$

- 色電荷:  $N_c = 3$

- ゲージボゾン: 8 グルーオン

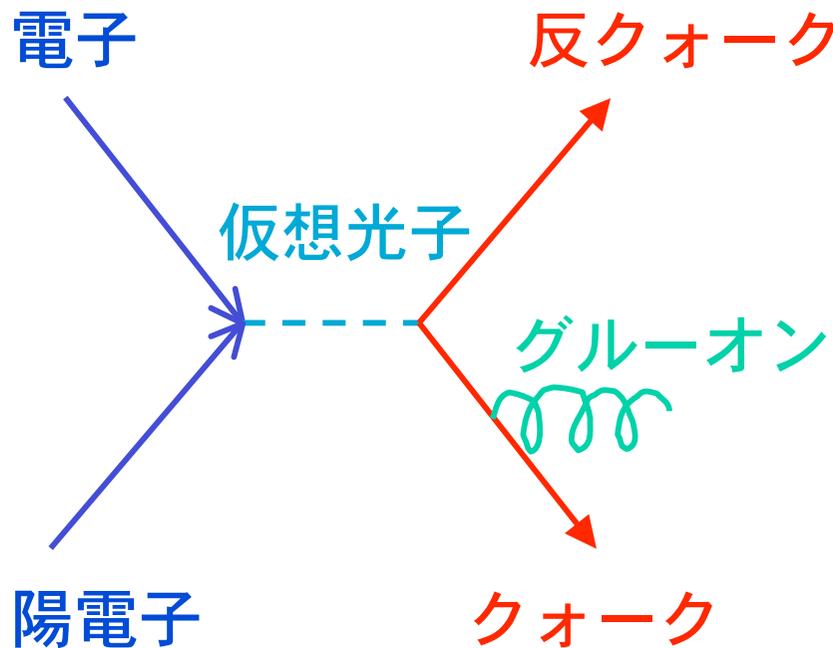
	QED	QCD
群	U(1) (Abelian)	SU(3) (Non-abelian)
フェルミオン	電荷	色電荷(3色)
Gaugeボゾン	フォトン (スピン 1 質量 0)	グルーオン (スピン 1 質量 0) 自由度 = 2 (スピン) 自
重ね合わせ	YES	NO (グルーオン: 自己相互作用)

# グルーオン

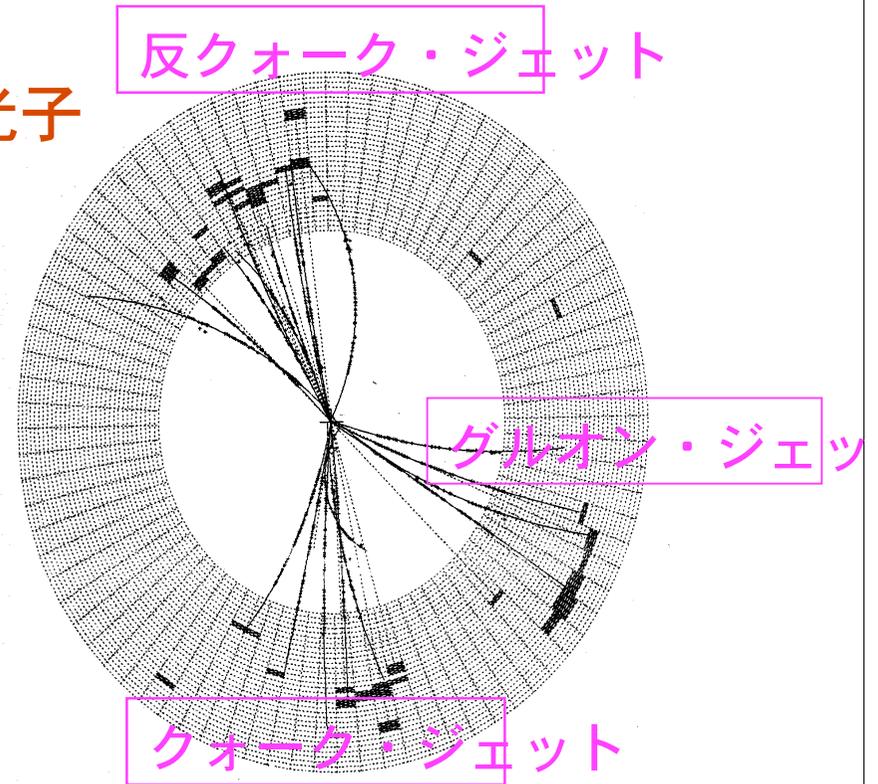
- クォーク間に働く交換力 : グルーオン



- 電荷の間に働く交換力 : 光子



電子と陽電子の衝突



PETRAのJADE検出器  
で  
観測された3-jet 事象

# Running Coupling Constant

Propagator :  $D(q^2) = \square / q^2 \rightarrow$  renormalization

## QED

- $q^2 \rightarrow$  小 ;  $\square(q^2) \rightarrow$  小
- $r \sim 1/q$ :  $\square$  は遠距離で小さい
  - shielding, screening

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 - \frac{\alpha_s(q_0^2)}{3\delta} \ln \frac{q^2}{q_0^2}}$$

## QCD

- $N_F =$  質量が  $|q^2|^{1/2}$  以下のクォーク・フレーバー数
- $\delta = 300 \sim 500$  MeV/c
- 低エネルギーでは  $\alpha_s \sim O(1)$ 
  - 摂動計算は不可能
- $q^2 \rightarrow$  大 ;  $\alpha_s(q^2) \rightarrow$  小
  - 漸近的自由 (asymptotic free)
  - 摂動計算可能
- $r \sim 1/q$ :  $\alpha_s$  は遠距離で大きい
  - anti-shielding

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + B\alpha_s(q_0^2) \ln \frac{q^2}{q_0^2}} = \frac{1}{B \ln \frac{q^2}{\Lambda^2}}$$

$$B = \frac{33 - 2N_F}{12\delta}$$

# クォークの存在形態

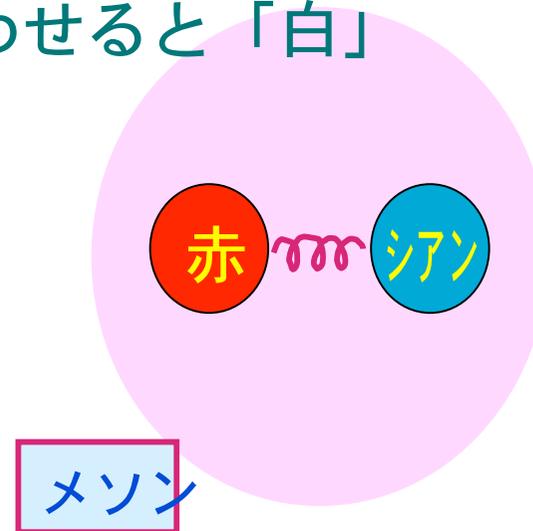
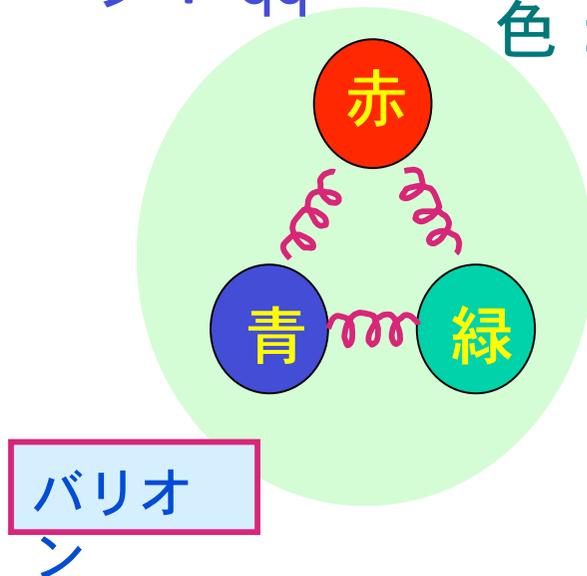
- ハドロン（強い相互作用をする複合粒子の総称）  
中にのみ存在

== 「クォークの閉じ込め」 ==

– バリオン（スピン = 半整数） = クォーク3個：  $qqq$

– メソン（中間子：スピン = 整数） = クォークと反クォーク：  
 $q\bar{q}$

色：足しあわせると「白」



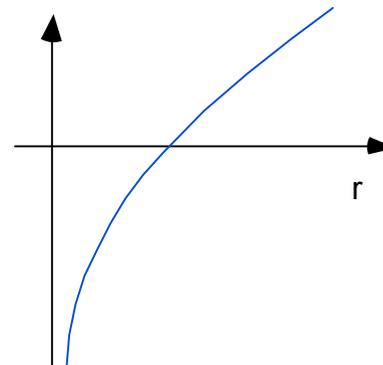
# 「閉じ込め」の描像

- QCD真空＝超伝導状態
  - グルーオン：超伝導体での磁気フラックスチューブのようなもの
  - 1-次元の力 → string, color flux tube

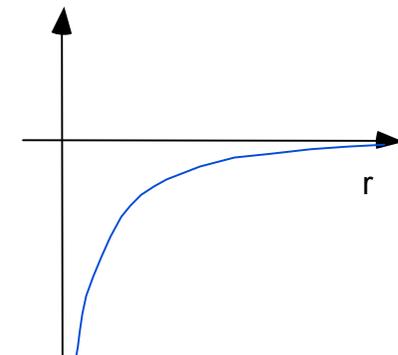
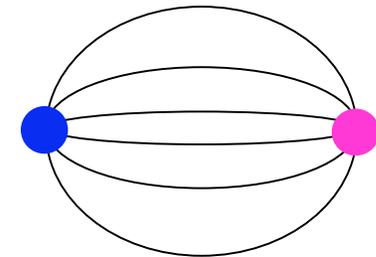
QGP相転移：  
真空の超伝導状態  
→ 常伝導状態

Quark-antiquark Potential

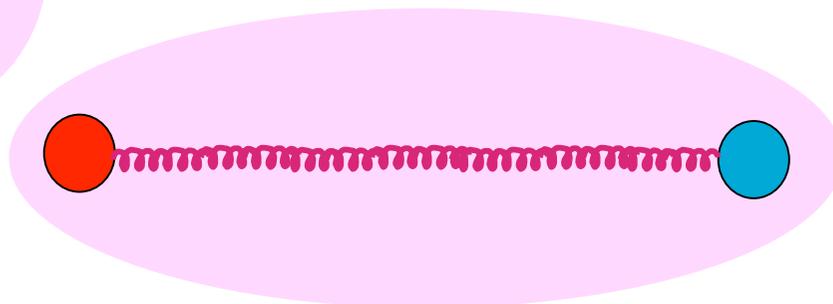
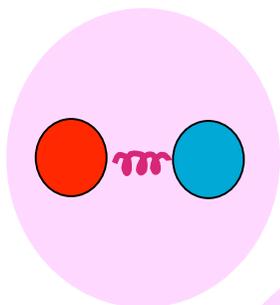
Confined



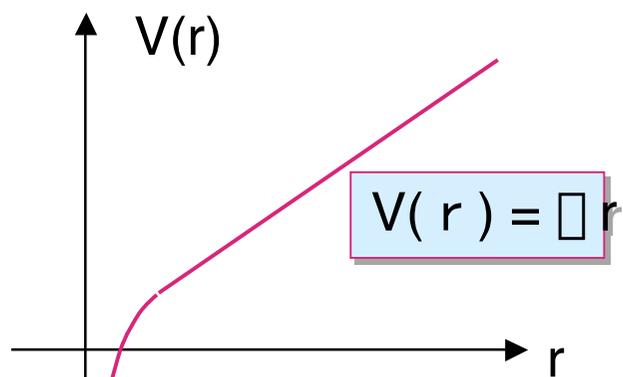
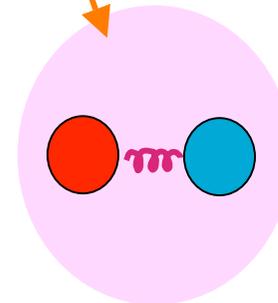
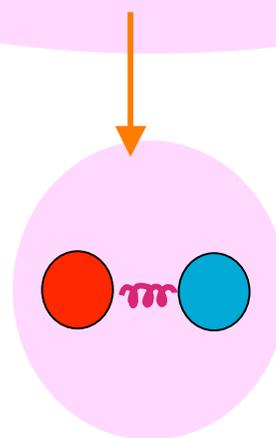
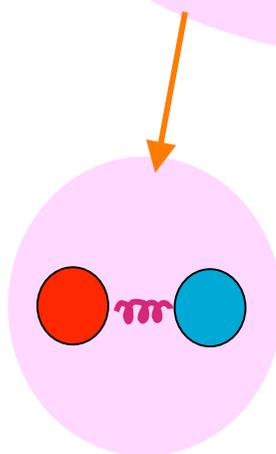
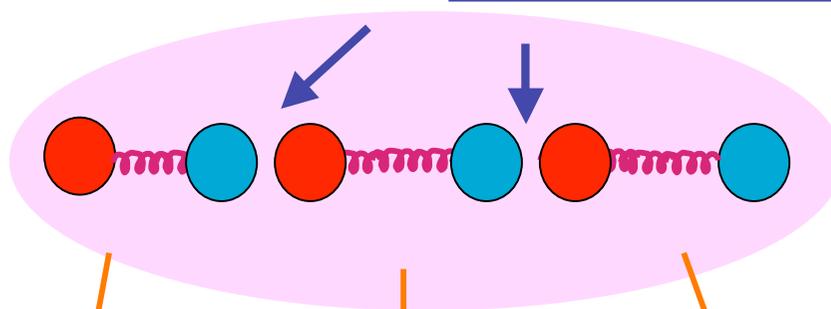
Deconfined



# クォーク・反クォークを引き離そうとすると



グルーオンがちぎれてクォーク・反クォークの対生成が起こる



強い力

$\sigma \sim 1 \text{ GeV/fm}$

# Quarkonium

- 重いクォーク・反クォークから成るメソン
  - 古典的なポテンシャル描像が可能

$$V_C = (\bar{q}q) \frac{q}{4\bar{r}}; \quad V_{linear} = \bar{r}$$

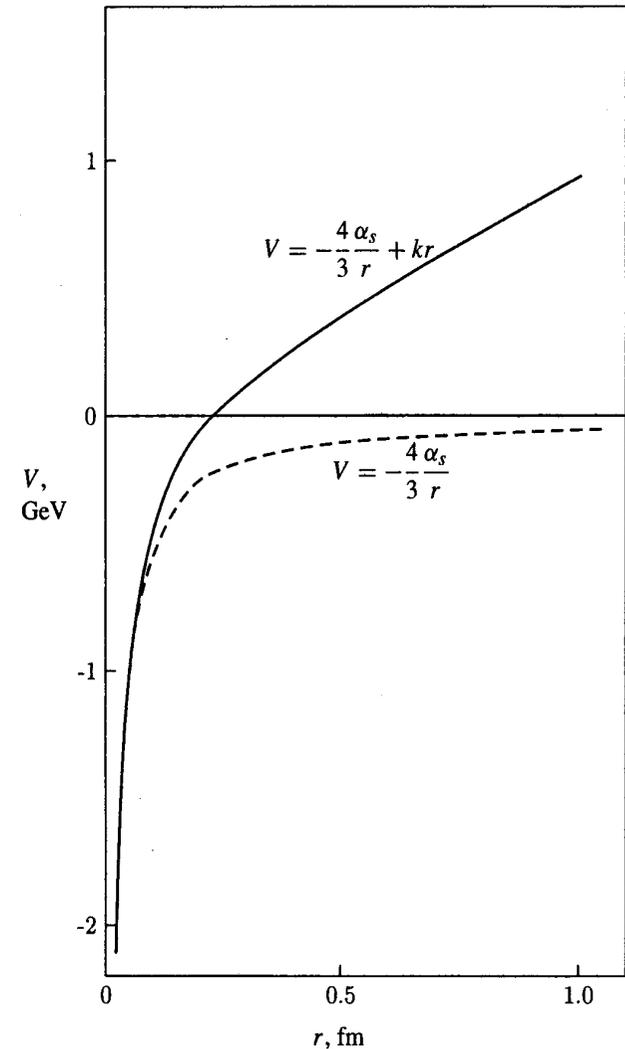
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\bar{r}_{eff}}{r} + \bar{r}$$

$$\bar{r}_{eff} = \frac{q^2}{4\bar{r}} = \frac{4}{3} \bar{r}_s \quad q^2 = \frac{4}{3} g^2$$

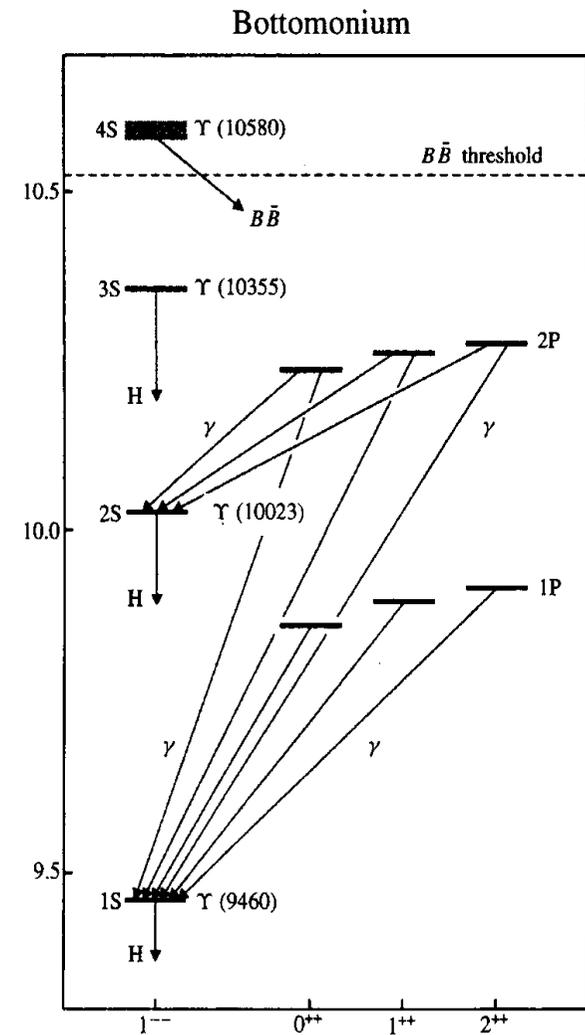
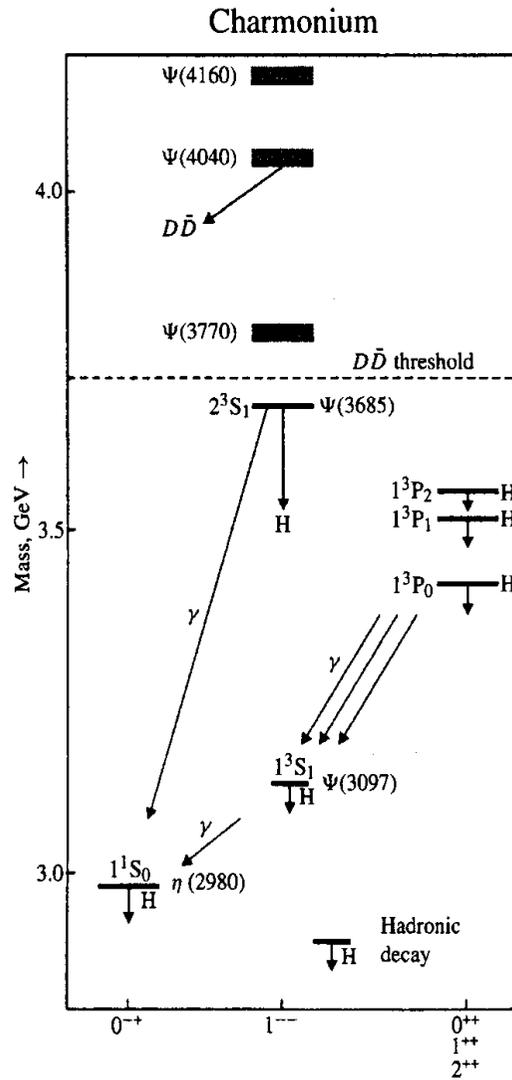
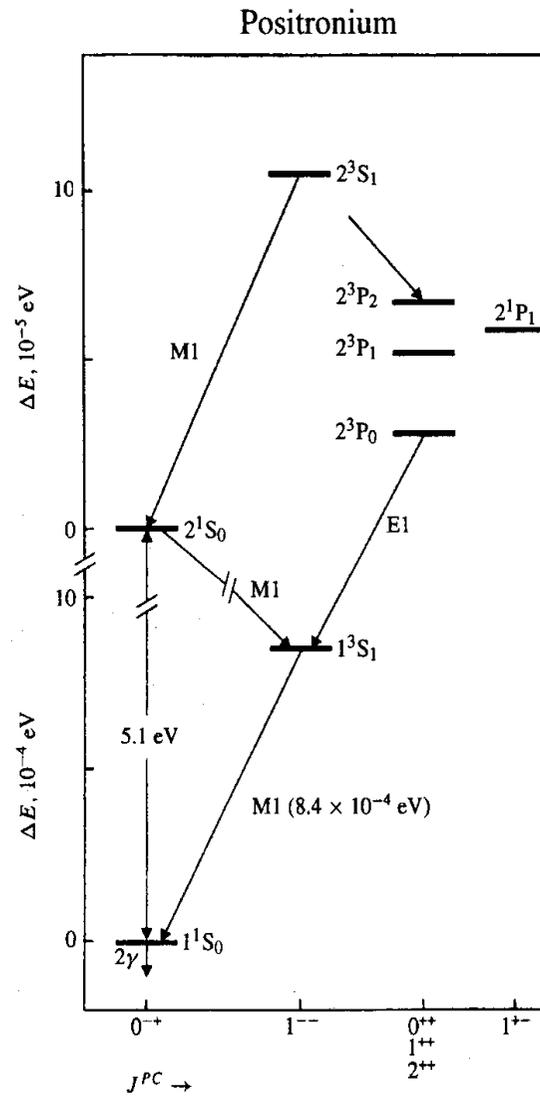
## Charmoniumのパラメーターセット

$$\bar{r}_{eff} = 0.52, \quad \bar{r} = 0.926 \text{ GeV/fm}, \quad m_c = 1.84 \text{ GeV}$$

$$\bar{r}_{eff} = 0.30, \quad \bar{r} = 1.18 \text{ GeV/fm}, \quad m_c = 1.65 \text{ GeV}$$



# Quarkonium のスペクトル



# MIT Bag Model

- 相対論的なクォーク模型
- 袋 (Bag)
  - クォークの閉じ込め : Bag pressure
- クォーク
  - 自由粒子
  - クォークの質量は、袋の中ではゼロ
  - 袋の外では無限大
- カラー
  - 袋中の和 = 袋外の和 = 0 (Gauss's law)

A. Chodos et al., Phys. Rev. D9 (1974) 3471.

C.D. DeTar and J.F. Donoghue, Ann. Rev. Nucl. Part Sci. 33 (1983)  
235.



# Bag 定数の導出

$$E = Np^0 + (\text{Bag energy}) = \frac{2.04N}{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 B$$

$$\frac{dE}{dR} = 0 \quad \square \quad \square \quad \frac{2.04N}{R^2} + 4\pi R^2 B = 0$$

N = Bag中のクォークの数  
3次元球Bagでの境界条件  
 $p^0 R = 2.04$

$$B^{1/4} = \left[ \frac{2.04N}{4\pi} \right]^{1/4} \frac{1}{R}$$

Bagの半径 → 大

クォークの運動エネルギー → 小

Bagエネルギー → 大

$$N = 3$$

$$R = 0.8 \text{ fm}$$

$$\square \quad B^{1/4} = 206 \text{ MeV}$$

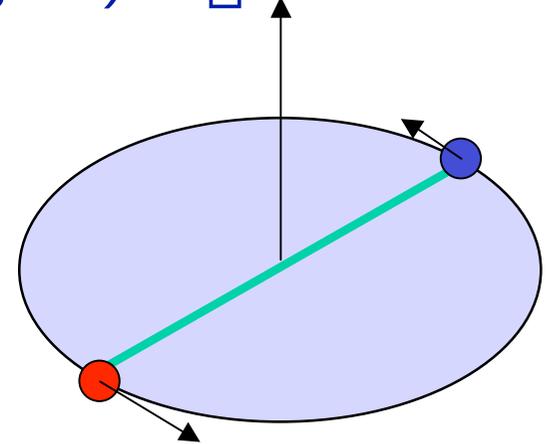
# ストリング（紐）模型

- 軽いクォーク系の場合には、quarkonium のような簡単な取り扱いはできない
- 質量ゼロのクォーク・反クォークが紐で結ばれている

長さ  $2L$  の紐で結ばれた質量ゼロのクォークと反クォークが回転運動している

紐のもつポテンシャルエネルギー :  $dE(x, dx) = \sigma dx$

$$\text{Mass energy : } M = 2 \int_0^L \frac{\hat{e} dx}{\sqrt{1 - \hat{a}^2}} = \partial \hat{e} L$$
$$\text{Angular momentum : } J = 2 \int_0^L \frac{x \cdot \hat{a} \cdot \hat{e} dx}{\sqrt{1 - \hat{a}^2}} = \frac{\partial \hat{e} L^2}{2}$$
$$\sigma = \frac{M^2}{2 \partial \hat{e}}$$



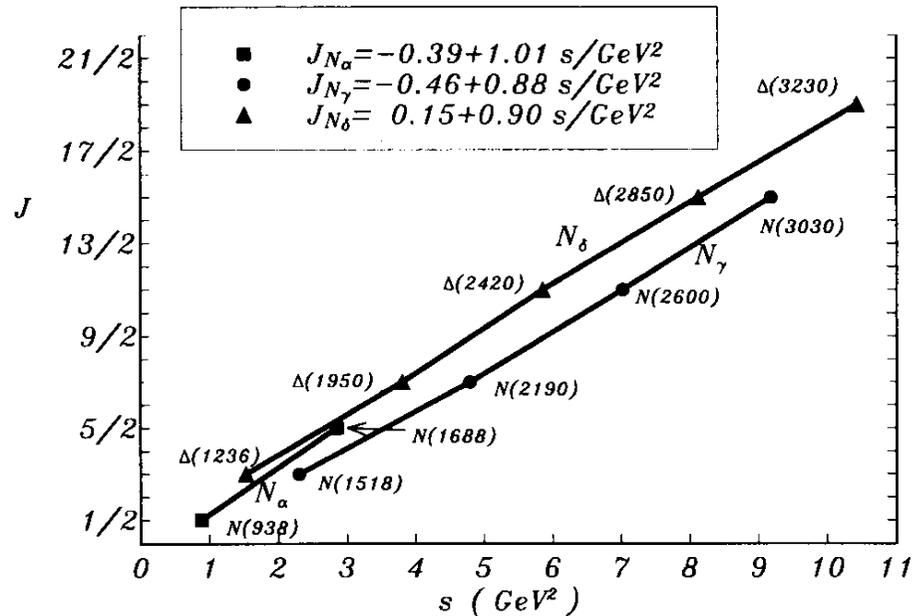
# バリオンの質量と角運動量の関係

## Regge Trajectory

$$J(M) = \alpha(0) + \alpha' M^2$$

$\alpha(0)$  : Regge intercept

$\alpha'$  : Regge 勾配 ( $\sim 1 \text{ GeV}^{-2}$ )



$$J = \frac{M^2}{2\alpha'}$$

→ String tension :  $\alpha' = 1/2\alpha''$  ( $\sim 1 \text{ GeV}/\text{fm}$ )

$$\alpha' = \frac{1}{2\alpha''} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{0.9} (\text{GeV}^2)} = \frac{1}{0.197 (\text{GeV} \cdot \text{fm})} = 0.9 \text{ GeV}/\text{fm}$$